入試にチャレンジ！（２年　式の活用）　　※展開や因数分解を含む問題もある（３年の内容）　→ ☆印

【栃木県立入試問題】

下の表は，１から 100 までの自然数を左から右へ 10 個ずつ，上から下へ順に並べたものである。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

この表中の太線で囲んだ

23	24	
	34	35

のような４つの整数の組

a	b	
	c	d

について，$bc - ad$ の値はつねに 11 になる。このことを証明しなさい。

令和７年度（☆）

3　次の $\boxed{}$ 内の先生と生徒の会話文を読んで，下の $\boxed{}$ 内の生徒が完成させた【証明】の $\boxed{①}$ から $\boxed{⑤}$ に当てはまる数や式をそれぞれ答えなさい。

先生「一の位が 0 でない 900 未満の 3 けたの自然数を M とし，M に 99 をたしてできる自然数を N とすると，M の各位の数の和と N の各位の数の和は同じ値になるという性質があります。例として 583 で確かめてみましょう。」

生徒「583 の各位の数の和は $5+8+3=16$ です。583 に 99 をたすと 682 となるので，各位の数の和は $6+8+2=16$ で同じ値になりました。」

先生「そうですね。それでは，M の百の位，十の位，一の位の数をそれぞれ a，b，c として，この性質を証明してみましょう。a，b，c のとりうる値の範囲に気をつけて，M と N をそれぞれ a，b，c を用いて表すとどうなりますか。」

生徒「M は表せそうですが，N は $\mathrm{M}+99$ で …，各位の数がうまく表せません。」

先生「99 を $100-1$ におきかえて考えてみましょう。」

生徒が完成させた【証明】

3 けたの自然数 M の百の位，十の位，一の位の数をそれぞれ a，b，c とすると，a は 1 以上 8 以下の整数，b は 0 以上 9 以下の整数，c は 1 以上 9 以下の整数となる。

このとき，

$\mathrm{M}=\boxed{①}\times a+\boxed{②}\times b+c$ と表せる。

また，$\mathrm{N}=\mathrm{M}+99$ より

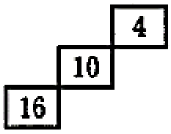
$\mathrm{N}=\boxed{①}\times a+\boxed{②}\times b+c+100-1$ となるから

$\mathrm{N}=\boxed{①}\times\left(\boxed{③}\right)+\boxed{②}\times\boxed{④}+\boxed{⑤}$ となり，

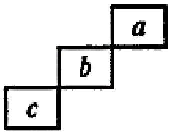
N の百の位の数は $\boxed{③}$，十の位の数は $\boxed{④}$，一の位の数は $\boxed{⑤}$ となる。

よって，M の各位の数の和と N の各位の数の和はそれぞれ $a+b+c$ となり，同じ値になる。

右の図は，2020年2月のカレンダーである。この中の



のような3つの自然数の組



において，b^2-ac はつねに同じ値となる。

次の □ 内の文は，このことを証明したものである。文中の ① ，② ，③ に当てはまる数をそれぞれ答えなさい。

2020年
2月

日	月	火	水	木	金	土
						1
2	3	$\boxed{4}$	5	6	7	8
9	$\boxed{10}$	11	12	13	14	15
$\boxed{16}$	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29

令和２年度（☆）

> b，c をそれぞれ a を用いて表すと，
> $b=a+$ ① ，$c=a+$ ② だから，
> $b^2-ac=(a+$ ① $)^2-a(a+$ ② $)$
> $=$ ③
> したがって，b^2-ac はつねに同じ値 ③ となる。

次の健太さんと春子さんの会話文を読んで，下の(1)，(2)の問いに答えなさい。

> 健太：「1331 や 9449 のような 4 けたの数は，11 で割り切れることを発見したよ。」
> 春子：「つまり，千の位と一の位が同じ数，そして百の位と十の位が同じ数の 4 けたの数は，11 の倍数になるということね。必ずそうなるか証明してみようよ。」
> 健太：「そうだね，やってみよう。千の位の数を a，百の位の数を b とすればよいかな。」
> 春子：「そうね。a を 1 から 9 の整数，b を 0 から 9 の整数とすると，この 4 けたの数 N は…」
> 健太：「$\mathrm{N}=1000\times a+100\times b+10\times$ ① $+1\times$ ②
> と表すことができるね。」
> 春子：「計算して整理すると，
> $\mathrm{N}=$ ③ (④ $a+$ ⑤ b)
> になるわね。」
> 健太：「 ④ $a+$ ⑤ b は整数だから，N は 11 の倍数だ。」
> 春子：「だからこのような 4 けたの数は，必ず 11 で割り切れるのね。」

(1) ① ，② に当てはまる適切な文字をそれぞれ答えなさい。

(2) ③ ，④ ，⑤ に当てはまる適切な数をそれぞれ答えなさい。

平成３１年度

あるクラスで募金を行ったところ，募金箱の中には，５円硬貨と１円硬貨は合わせて 36 枚入っていた。募金箱の中に入っていた５円硬貨と１円硬貨の合計金額を a 円とするとき，a は４の倍数になることを，５円硬貨の枚数を b 枚として証明しなさい。

平成３０年度

右の図は，あるクラスの座席を出席番号で表したものである。

この図中の

13	8
14	9

のような 4 つの整数の組

c	a
d	b

について考える。

このとき，$bc-ad$ の値はつねに 5 になることを，a を用いて証明しなさい。

教卓

26	21	16	11	6	1
27	22	17	12	7	2
28	23	18	13	8	3
29	24	19	14	9	4
30	25	20	15	10	5

平成２９年度（☆）

連続する 5 つの整数がある。最も大きい数と 2 番目に大きい数の積から，最も小さい数と 2 番目に小さい数の積をひくと，中央の数の 6 倍になる。このことを，中央の数を n として証明しなさい。

平成２６年度（☆）

下の表は，「かけ算九九の表」の一部である。表中の $\boxed{8}$ の 8 は，かけられる数が 4，かける数が 2 のときの 4×2 の値を表している。この表中の

6		
	12	
		20

のような 3 つの整数の組

a		
	b	
		c

について考える。このとき，$a+c-2b$ の値はつねに 2 になる。このことを，a は，かけられる数が m，かける数が n であるものとして説明しなさい。

平成２５年度（☆）

かけられる数＼かける数	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	6	8	10
3	3	6	9	12	15
4	4	8	12	16	20
5	5	10	15	20	25

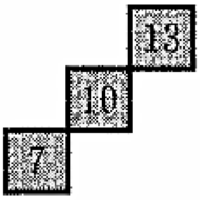
２，３，４や５，６，７のような，中央の数が３の倍数である連続する３つの整数では，最も大きい数の２乗から最も小さい数の２乗をひいた差は，12 の倍数になる。このことを証明しなさい。

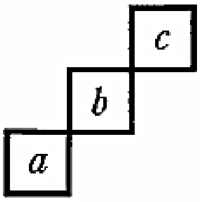
平成２３年度（☆）

連続する４つの整数を小さい方から順に a，b，c，d とするとき，$bc-ad$ の値はつねに２になる。このことを，a を用いて説明しなさい。

平成２２年度（☆）

下の表は，自然数をある規則に従って並べたものの一部である。

表の中の 

のような，３つの自然数の組 

について考える。

このとき，$bc-a^2$ の値は９の倍数になることを，a を用いて説明しなさい。

1	5	9	13	17	21	25	29
2	6	10	14	18	22	26	30
3	7	11	15	19	23	27	31
4	8	12	16	20	24	28	32

平成２０年度（☆）

R７

b，c，d をそれぞれ a を用いて表すと，

$b = a + 1$，$c = a + 11$，$d = a + 12$ だから

$$bc - ad = (a + 1)(a + 11) - a(a + 12)$$
$$= a^2 + 12a + 11 - a^2 - 12a$$
$$= 11$$

したがって，$bc - ad$ の値はつねに 11 となる。

R５

①（ 100 ）　②（ 10 ）

③（ $a+1$ ）　④（ b ）　⑤（ $c-1$ ）

R２

①（ 6 ）

②（ 12 ）

③（ 36 ）

H３１

(1)	①	（ b ）
	②	（ a ）
(2)	③	（ 11 ）
	④	（ 91 ）
	⑤	（ 10 ）

H３０

５円硬貨の枚数が b 枚なので，１円硬貨の枚数は，$(36-b)$枚と表される。
よって，合計金額は，

$a=5\times b+1\times(36-b)$
$=5b+(36-b)$
$=5b+36-b$
$=4b+36$
$=4(b+9)$

b は整数だから，$(b+9)$も整数である。
したがって，a は $4\times$(整数)の形で表されるから，４の倍数である。

H２９

a を用いて証明するために，b，c，d をそれぞれ a の式で表す。
b は a より１大きい。c は a より５大きく，d は c より１大きいから，$b=a+1$，$c=a+5$，
$d=c+1=(a+5)+1=a+6$ と表せ，これらを $bc-ad$ に代入する。
$bc-ad=(a+1)(a+5)-a(a+6)=a^2+6a+5-a^2-6a=5$
したがって，$bc-ad$ の値はつねに５になる。

H２６

中央の数が n であるから，連続する５つの整数は最も小さい数から順に　$n-2$，$n-1$，n，$n+1$，$n+2$ と表される。

よって

$$(n+2)(n+1)-(n-2)(n-1)$$
$$=(n^2+3n+2)-(n^2-3n+2)$$
$$=6n$$

n は中央の数だから，最も大きい数と２番目に大きい数の積から，最も小さい数と２番目に小さい数の積をひくと，中央の数の６倍になる。

H２５

$a=mn$，$b=(m+1)(n+1)$，$c=(m+2)(n+2)$　と表すことができる。

よって $a+c-2b=mn+(m+2)(n+2)-2(m+1)(n+1)$

$$=mn+mn+2m+2n+4-2mn-2m-2n-2$$
$$=2$$

したがって $a+c-2b$ の値はつねに２になる。

H２３

n を整数とすると，中央の数は $3n$ と表せるので

最も小さい数は $3n-1$，最も大きい数は $3n+1$ となる。

最も大きい数の２乗から最も小さい数の２乗をひいた差は，

$$(3n+1)^2-(3n-1)^2=(9n^2+6n+1)-(9n^2-6n+1)$$
$$=12n$$

n は整数だから，$12n$ は 12 の倍数である。

したがって，最も大きい数の２乗から最も小さい数の２乗をひいた差は 12 の倍数である。

H２２

b，c，d をそれぞれ a を用いて表すと，

$b=a+1$，$c=a+2$，$d=a+3$　となる。

よって $bc-ad=(a+1)(a+2)-a(a+3)$

$$=a^2+3a+2-a^2-3a$$
$$=2$$

したがって，$bc-ad$ の値はつねに２になる。

$\boxed{\text{Ｈ２０}}$

$b=a+3$，$c=a+6$　と表すことができる。

よって $bc-a^2=(a+3)(a+6)-a^2$

$=a^2+9a+18-a^2$

$=9a+18$

$=9(a+2)$

$a+2$ は自然数だから，$9(a+2)$は 9 の倍数である。

したがって，$bc-a^2$ の値は 9 の倍数になる。