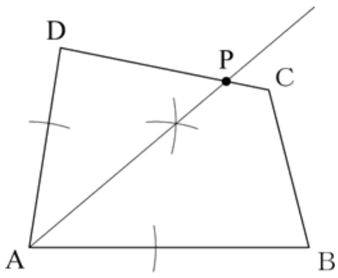
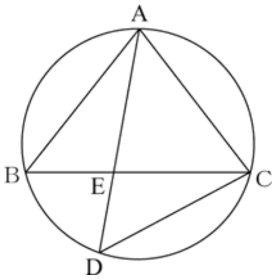
H29　栃木県　公立　**数学　正答と解説**

●正答

問題番号		解　　答	配点	備　　考
1	問１	-12	2	
	問２	$\frac{1}{4}x$	2	
	問３	$5a-3b$	2	
	問４	$x(x-6)$	2	
	問５	$(x=)$　$5y+7$	2	
	問６	$(a=)$　3	2	
	問７	$(y=)$　4	2	
	問８	$(x=)$　$\frac{27}{4}$	2	
	問９	$\frac{5}{6}$	2	
	問 10	112　(度)	2	
	問 11	$(n=)$　5	2	
	問 12	辺 BC，辺 EF	2	
	問 13	$0 \leqq y \leqq 18$	2	
	問 14	$\frac{32}{3}\pi$　(cm^3)	2	

問題番号			解答	配点	備考
2	問１		(例)  	4	
	問２	(1)	ウ	2	
		(2)	(およそ)　420　(人)	2	
	問３		(a＝)　$\frac{5}{2}$	4	
3	問１		〔証明〕 (例) $b=a+1$，$c=a+5$，$d=a+6$ と表される。 よって $bc-ad=(a+1)(a+5)-a(a+6)$ $=a^2+6a+5-a^2-6a$ $=5$ したがって $bc-ad$ の値はつねに 5 になる。	6	
	問２		(例) $\begin{cases} x+y=3600 & \cdots\cdots① \\ \frac{x}{80}+5+\frac{y}{480}=20 & \cdots\cdots② \end{cases}$ ②より $6x+y=7200$　……③ ①－③より　$-5x=-3600$ よって $x=720$ ①に代入して $720+y=3600$ したがって $y=2880$ この解は問題に適している。 答え（自宅からバス停まで　720 m，バス停から駅まで　2880m）	6	

<table>
<tr><th colspan="2">問題番号</th><th colspan="2">解　　答</th><th>配点</th><th>備　考</th></tr>
<tr><td rowspan="3">4</td><td>問１</td><td colspan="2">
〔証明〕
(例)
△ADC と△ACE において
共通な角であるから
∠DAC＝∠CAE……①
弧 AC に対する円周角の大きさは等しいから
∠ABC＝∠ADC……②
仮定より△ABC は二等辺三角形であるから
2 つの底角は等しいので
∠ABC＝∠ACE……③
②，③より
∠ADC＝∠ACE……④
①，④より
2 組の角がそれぞれ等しいから
△ADC∽△ACE</td><td>7</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">問２</td><td>(1)</td><td>$2\sqrt{5}$ (cm)</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>(S：T＝) 15：2</td><td>3</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">問題番号</th><th>解　　答</th><th>配点</th><th>備　考</th></tr>
<tr><td rowspan="4">5</td><td rowspan="3">問１</td><td>(1)</td><td>86　(L)</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>5　(分後)</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>(3)</td><td>(例)
排水を始めて 20 分後から 50 分後までのグラフの傾きは
$\dfrac{0-120}{50-20}=-4$
であるから，x と y の関係の式は $y=-4x+b$ と表される。
グラフは点（50，0）を通るから
$0=-4\times50+b$
よって $b=200$
したがって，求める式は $y=-4x+200$

答え（$y=-4x+200$）</td><td>7</td><td></td></tr>
<tr><td>問２</td><td colspan="2">33　(分)　20　(秒後)</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">6</td><td rowspan="2">問１</td><td>(1)</td><td>60　(個)</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>47　(cm^2)</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>問２</td><td colspan="2">(例)
１面だけに色が塗られた積木 A が 65 個だから
$(x-1)^2+4(x-1)\times2=65$
$x^2+6x-72=0$
$(x+12)(x-6)=0$
$x=-12,\ x=6$
x は正の整数だから，$x=6$

答え（　　$x=6$　　）</td><td>7</td><td></td></tr>
<tr><td>問３</td><td colspan="2">11　(個)</td><td>6</td><td></td></tr>
</table>

●解説

1 問１　$3\times(-4)=-(3\times4)=-12$

問２　$\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}x=\frac{3}{4}x-\frac{2}{4}x=\frac{1}{4}x$

問３　$2(a-3b)+3(a+b)=2a-6b+3a+3b=5a-3b$

問４　$x^2-6x=x\times x+x\times(-6)=x(x-6)$

問５　$y=\frac{x-7}{5}$　右辺と左辺を入れかえ，両辺に５をかけると，$x-7=5y$　-7 を右辺に移項して，
$x=5y+7$

問６　$ax+9=5x-a$ に $x=6$ を代入すると，$a\times6+9=5\times6-a$　$6a+9=30-a$　$7a=21$　$a=3$

問７　求める式を $y=ax$ として，$x=2$，$y=-8$ を代入すると，$-8=a\times2$　$2a=-8$　$a=-4$
$y=-4x$ に $x=-1$ を代入すると，$y=-4\times(-1)=4$

問８　平行線と線分の比の関係から，$4:(4+5)=3:x$　$4:9=3:x$　$4x=27$　$x=\frac{27}{4}$

問９　１個のさいころを投げるときの目の出方は全部で６通りだから，出る目の数が４になる確率は $\frac{1}{6}$ になるので，出る目の数が４でない確率は，$1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

問 10　四角形 ABCD は平行四辺形だから，$\angle\mathrm{ABE}=\angle\mathrm{CDA}=65^\circ$
$\triangle\mathrm{ABE}$ で，三角形の内角・外角の性質より，$\angle x=\angle\mathrm{BAE}+\angle\mathrm{ABE}=47^\circ+65^\circ=112^\circ$

問 11　$\sqrt{45n}=\sqrt{3^2\times5\times n}=3\sqrt{5\times n}$ だから，$n=5$

問 12　辺 AD とねじれの位置にある辺は，辺 AD と平行でなく交わらない辺だから，辺 BC，EF

問 13　x の変域に０を含んでいるので，y の値が最小となるのは，$x=0$ のときで，$y=0$
y の値が最大となるのは，-2 と３で絶対値の大きい $x=3$ のときで，$y=2\times3^2=18$　よって，y の変域は，$0\leqq y\leqq18$

問 14　半径２cm の球ができるから，求める体積は，$\frac{4}{3}\pi\times2^3=\frac{32}{3}\pi\,(\mathrm{cm}^3)$

2 問１　２辺 AB，AD からの距離が等しい点は，$\angle\mathrm{DAB}$ の二等分線上にある。
よって，$\angle\mathrm{DAB}$ の二等分線と辺 CD の交点が P となる。

問２　(1)　母集団(全校生徒 525 人)を代表するように，かたよりなく標本を選ばなくてはならない。
(2)　抽出された 40 人において，冬休みに家の手伝いをした生徒の割合は，$32\div40=0.8$
全校生徒 525 人においても，冬休みに家の手伝いをした生徒の割合は 0.8 であると考えられるから，$525\times0.8=420$ より，およそ 420 人となる。

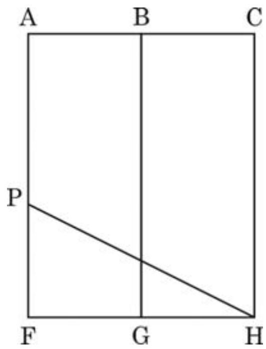
問３　条件から，点 A の y 座標と点 C の y 座標は等しくなり，この２点は y 軸について対称である。
よって，点 A の x 座標と点 C の x 座標の絶対値は等しい。
点 A の x 座標は２だから，点 A の y 座標は，$y=ax^2$ に $x=2$ を代入して，$y=a\times2^2=4a$
A$(2,\ 4a)$より，C$(-2,\ 4a)$
同様に，点 B の y 座標と点 D の y 座標は等しくなり，この２点は y 軸について対称である。
よって，点 B の x 座標と点 D の x 座標の絶対値は等しい。
点 B の x 座標は２だから，点 B の y 座標は，$y=x^2$ に $x=2$ を代入して，$y=2^2=4$
B$(2,\ 4)$より，D$(-2,\ 4)$
長方形 ACDB の縦の長さは $4a-4$，横の長さは $2-(-2)=4$ であり，その面積は 24 だから，
$(4a-4)\times4=24$　整理をすると，$a=\frac{5}{2}$

3 問１　a を用いて証明するために，b，c，d をそれぞれ a の式で表す。
b は a より 1 大きい。c は a より 5 大きく，d は c より 1 大きいから，$b=a+1$，$c=a+5$，
$d=c+1=(a+5)+1=a+6$ と表せ，これらを $bc-ad$ に代入する。
$bc-ad=(a+1)(a+5)-a(a+6)=a^2+6a+5-a^2-6a=5$
したがって，$bc-ad$ の値はつねに 5 になる。

問２　あおいさんの自宅からバス停までと，バス停から駅までの道のりの合計は 3600m であるから，
$x+y=3600$…①
あおいさんが自宅からバス停まで，毎分 80m の速さで歩くときにかかった時間は，$x\div80=\frac{x}{80}$ (分)
バス停から駅まで，毎分 480m の速さのバスに乗って行くときにかかった時間は，$y\div480=\frac{y}{480}$ (分)
あおいさんが駅に到着したのは自宅を出発してから 20 分後であったから，$\frac{x}{80}+5+\frac{y}{480}=20$…②
①と②を連立方程式として解く。②より，$6x+y=7200$…③
①−③より，$x-6x=3600-7200$　$-5x=-3600$　$x=720$…④
①に④を代入して，$720+y=3600$　$y=2880$　この解は問題に適している。

4 問１　円周角の定理と二等辺三角形の 2 つの底角の大きさが等しくなることから，∠ABC＝∠ACE を導く。これと仮定から証明をする。

問２　(1) 右の図のように，正五角柱の展開図の一部をかいて考える。
点 P と点 H を最短の長さで結ぶ線をひくとき，その線は，
右の図の線分 PH で表される。
求める長さを $x$cm とすると，右の図の△PFH において，
三平方の定理より，$(5-3)^2+(2+2)^2=x^2$　$2^2+4^2=x^2$　$x^2=20$
$x>0$ だから，$x=2\sqrt{5}$



(2) 正五角柱 ABCDE−FGHIJ と五角錐 P−FGHIJ において，底面 FGHIJ の面積を $y\,\mathrm{cm}^2$ とすると，
正五角柱 ABCDE−FGHIJ の体積は，$y\times5=5y$ (cm^3)
五角錐 P−FGHIJ の体積は，$\frac{1}{3}\times y\times2=\frac{2}{3}y$ (cm^3)
よって，S：T＝$5y:\frac{2}{3}y=5:\frac{2}{3}=15:2$

5 問１　(1)　水そう A から 3 分間に排水される水の量は，$6\times3=18$ (L)
水そう B から 3 分間に排水される水の量は，$4\times3=12$ (L)
よって，求める水の量は，$80+18-12=86$ (L)

(2) 水そう A の水がなくなるのは，排水を始めてから $120\div6=20$ (分後) だから，
水そう A と水そう B の水の量が初めて等しくなるのは，$0\leqq x\leqq20$ のときである。
図２のグラフより，$0\leqq x\leqq20$ のときの x と y の関係は $y=2x+80$ と表される。
また，排水を始めてから x 分後の水そう A の水の量は，$120-6x$ (L) と表されるから，
$120-6x=2x+80$　$-8x=-40$　$x=5$　この解は問題に適している。

(3) **図２**より，$20\leqq x\leqq50$ のときのグラフの傾きは，2 点 (20，120)，(50，0) を通ることから，
$\frac{0-120}{50-20}=\frac{-120}{30}=-4$ となる。よって，求める式は，$y=-4x+b$ と表される。
$y=-4x+b$ に $x=50$，$y=0$ を代入すると，$0=-4\times50+b$　$b=200$　したがって，$y=-4x+200$

問２　水そうＡの水がなくなるのは，排水を始めてから $150\div6=25$ (分後) だから，

排水を始めてから 25 分後の水そうＢの水の量は，$110+150-7\times25=85$ (L)

この 85L の水を，$40-25=15$(分)で排水したことになる。

その 15 分間の排水において，毎分 7 L の割合で排水した時間を t 分とすると，

毎分 4 L の割合で排水した時間は，$15-t$ (分) と表されるから，

$7t+4(15-t)=85$ が成り立ち，整理をすると，$t=\dfrac{25}{3}$

よって，水そうＢの排水を毎分 4 L に変えたのは，同時に排水を始めてから $25+\dfrac{25}{3}=\dfrac{100}{3}$ (分後)

$\dfrac{100}{3}$ 分＝33 分 20 秒より，33 分 20 秒後である。この解は問題に適している。

$\boxed{6}$ 問１　(1)　$4\times5\times3=60$ (個)

(2)　$4\times5+4\times3+5\times3=47$ (cm^2)

※問２，問３においては，a cm の辺と b cm の辺がある長方形の面を P，a cm の辺と c cm の辺がある長方形の面を Q，b cm の辺と c cm の辺がある長方形の面を R とする。

問２　条件より，$a=b=x$，$c=5$ である。

P，Q，R のそれぞれについて，1 面だけに色が塗られた積木Ａの個数を調べる。

P は $(x-1)^2=x^2-2x+1$ (個)，Q は $(5-1)(x-1)=4x-4$ (個)，R は Q と等しく $4x-4$ (個) となる。

よって，$(x^2-2x+1)+(4x-4)+(4x-4)=65$　整理すると，$(x-6)(x+12)=0$ となり，x は正の整数だから，$x=6$

問３　ちょうど 2 面に色が塗られる積木Ａの個数を調べる。

色が塗られる 2 面が P と Q にそれぞれ含まれる積木Ａの個数は，$a-1$ (個)

色が塗られる 2 面が P と R にそれぞれ含まれる積木Ａの個数は，$b-1$ (個)

色が塗られる 2 面が Q と R にそれぞれ含まれる積木Ａの個数は，$c-1$ (個)

よって，ちょうど 2 面に色が塗られる積木Ａの個数は，

$(a-1)+(b-1)+(c-1)=a+b+c-3$ (個)

積が 84 となる 3 つの正の整数の組み合わせを調べると，(1，1，84)，(1，2，42)，(1，3，28)，(1，4，21)，(1，6，14)，(1，7，12)，(2，2，21)，(2，3，14)，(2，6，7)，(3，4，7)

の 10 組があり，考えられる直方体Ｂは 10 種類である。

a，b，c に各組の 3 つの正の整数をどのように代入しても，$a+b+c-3$ の値は同じになる。

$a+b+c-3$ の値が最も小さい組は (3，4，7) で，その値は 11 となる。

よって，求める個数は 11 個である。